

7 класс

1. В комнате находятся 10 человек; некоторые из них – рыцари (они всегда говорят правду), другие – лжецы (они всегда лгут). У каждого из присутствующих имеется карточка с натуральным числом от 1 до 10; числа на всех карточках различны. Каждый из присутствующих назвал число на своей карточке:

один из них сказал «У меня карточка с числом 1»,

ещё двое сказали «У меня карточка с числом 2»,

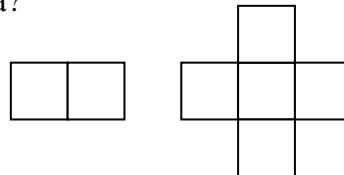
ещё трое сказали «У меня карточка с числом 3»,

наконец, остальные четверо сказали «У меня карточка с числом 4».

Найдите наименьшее возможное количество лжецов в комнате.

2. В клетки таблицы 3 x 3 необходимо расставить три единицы, три двойки и три тройки. Числа должны быть расставлены по одному числу в клетку так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречались единица, двойка и тройка. Сколько существует способов расставить числа по этим правилам?

3. Квадрат, разделённый на клетки, разрежали на несколько частей. Каждая часть – это пятиклеточный крест или двухклеточный прямоугольник; они изображены на рисунке. Могло ли так оказаться, что суммарная площадь пятиклеточных крестов составляет больше половины площади исходного квадрата?



4. Имеется 16 яблок; любые два из них – разной массы. Также имеются чашечные весы, с помощью которых можно сравнивать массу любых двух яблок: на левую чашу весов помещается одно из сравниваемых яблок, на правую другое, и та из чаш, на которой более тяжёлое яблоко, перевешивает. На одну чашу весов нельзя одновременно поместить больше одного яблока. Как за не более, чем 18 взвешиваний гарантированно найти два самых тяжёлых яблока? Выяснить, какое из двух найденных яблок тяжелее, не обязательно.

5. У Димы есть коробка, имеющая размеры 15 x 18 x 32 см, а также кирпичи двух видов (1 x 4 x 4 см и 2 x 2 x 6 см), каждого вида по тысяче штук. Может ли Дима заполнить коробку кирпичами так, чтобы в коробке не было пустот, и из неё не выступали кирпичи? Использовать все кирпичи не обязательно.

8 класс

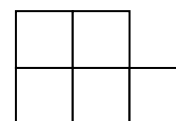
1. На чудо-дереве, которое вырастил в лаборатории Иннокентий Петрович, выросли плоды трёх видов – апельсины, бананы и груши. Известно, что количество апельсинов составляет ровно 48% от количества плодов на чудо-дереве, а количество бананов на 23 больше, чем количество груш. Сколько всего плодов выросло на чудо-дереве, если известно, что их было не больше 100?

2. Имеются шесть гирь, имеющих массу 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г, 6 г соответственно. На каждой гире написана масса в граммах. Возможно, некоторые надписи перепутаны. За какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах можно выяснить, есть ли среди надписей неправильные? Какие именно надписи неправильные, выяснять не требуется.

3. Плоский торт имеет форму треугольника, в котором один из углов втрое больше другого. Сверху торт покрыт шоколадом. Коробка для торта имеет форму треугольника, равного торту, но симметричного ему относительно некоторой прямой. Как разрезать торт на две части, которые можно будет разместить в коробке шоколадом вверх? Части не могут располагаться одна над другой.

4. Существует ли натуральное число $n > 50$ такое, что у каждого из чисел n , $2n$, $3n$, ..., n^2 цифра десятков не равна цифре единиц?

5. Можно ли из картонного прямоугольника 5×7 клеток вырезать 7 фигур, изображённых на рисунке? Допускается вырезать фигуры, полученные из данной поворотом и/или переворотом на другую сторону.



9 класс

1. Действительные числа x и y таковы, что $9x^2 - 128y^3 - 102x + 16y^6 + 545 = 0$. Найдите значение выражения $9x + 17y^3$.

2. Существуют ли 2023 натуральных числа, для которых выполнены следующие три условия:

- а) ни одно из данных чисел не делится ни на одно из остальных данных чисел;
- б) ни одно из данных чисел не является квадратом натурального числа;
- в) произведение любых двух данных чисел является квадратом натурального числа?

3. Плоский торт имеет форму остроугольного треугольника, в котором один из углов вдвое больше другого. Сверху торт покрыт шоколадом. Коробка для торта имеет форму треугольника, равного торту, но симметричного ему относительно некоторой прямой. Как разрезать торт на две части, которые можно будет разместить в коробке шоколадом вверх? Части не могут располагаться одна над другой.

4. Имеется 100 яблок; любые два из них – разной массы. Также имеются чашечные весы, с помощью которых можно сравнивать массу любых двух яблок: на левую чашу весов помещается одно из сравниваемых яблок, на правую другое, и та из чаш, на которой более тяжёлое яблоко, перевешивает. На одну чашу весов нельзя одновременно поместить больше одного яблока. Как за не более, чем 120 взвешиваний гарантированно найти три самых тяжёлых яблока? Выяснить, как яблоки в найденной тройке упорядочены по массе, не обязательно.

5. На столе находятся две шкатулки с монетами - красная и белая. В красной шкатулке 15 монет, в белой 14. Алексей и Борис играют в следующую игру, делая ходы по очереди (первым ходит Алексей). За один ход игроку разрешается либо взять из любой шкатулки две монеты и положить их себе в карман, либо переложить одну монету из красной шкатулки в белую. Проигрывает тот из игроков, кто не может сделать ход по правилам игры. Кто из игроков выиграет, если оба стремятся играть как можно лучше?

10 класс

1. Верно ли, что для любых положительных a, b, c выполнено неравенство $a^4b + b^4c + c^4a \geq a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2$?

2. У Ани имеется семь карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. У Вики также имеется семь карточек с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Могут ли Аня и Вика составить из всех своих карточек разные семизначные числа так, что число Ани разделится на число Вики?

3. Барон Мюнхгаузен утверждает, что однажды ему удалось разрезать три равных квадрата (красный, зелёный и синий); после разрезания образовалось 60 частей: 20 красных треугольников, 20 зелёных треугольников и 20 синих треугольников. При этом любые два одноцветных треугольника оказались равны друг другу, а любые два треугольника разного цвета – не равны друг другу. Может ли барон быть прав?

4. В клетки таблицы 4×4 необходимо расставить четыре единицы, четыре двойки, четыре тройки и четыре четвёрки. Числа должны быть расставлены по одному числу в клетку так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречались единица, двойка, тройка и четвёрка. Сколько существует способов расставить числа по этим правилам?

5. Плоский торт имеет форму треугольника, в котором один из углов вдвое больше другого. Сверху торт покрыт шоколадом. Коробка для торта имеет форму треугольника, равного торту, но симметричного ему относительно некоторой прямой. Как разрезать торт на две части, которые можно будет разместить в коробке шоколадом вверх? Части не могут располагаться одна над другой.

11 класс

1. Что больше: количество способов разложить 11 гирек с массами 1 г, 2 г, ..., 11 г на две чаши весов так, чтобы весы остались в равновесии, или количество способов разложить так 12 гирек с массами 1 г, 2 г, ..., 12 г?

2. Найдите все пары натуральных m, n , для которых выполнено равенство $3^n - m^3 = 1$.

3. Решите уравнение $(7x + 3)^4 + (2x - 6)^4 = (3x + 7)^4 + (6x - 2)^4$.

4. Семь городов расположены в центре и вершинах правильного шестиугольника со стороной 100 км. Можно ли построить несколько дорог, имеющих суммарную длину не больше 550 км, с помощью которых от любого города можно добраться до любого другого? Города считать точками.

5. Плоский торт имеет форму треугольника с углами 20, 30 и 130 градусов. Сверху торт покрыт шоколадом. Коробка для торта имеет форму треугольника, равного торту, но симметричного ему относительно некоторой прямой. Как разрезать торт на две части, которые можно будет разместить в коробке шоколадом вверх? Части не могут располагаться одна над другой.